

Szűk szögtartományú tomográfiai inverzió speciális problémái

Balázs László
Surányi Gergely
Hamar Gergő
Varga Dezső
Oláh László

Wigner FK
RMI NFO

Geomatika
Szeminárium
Sopron

2025.10.17

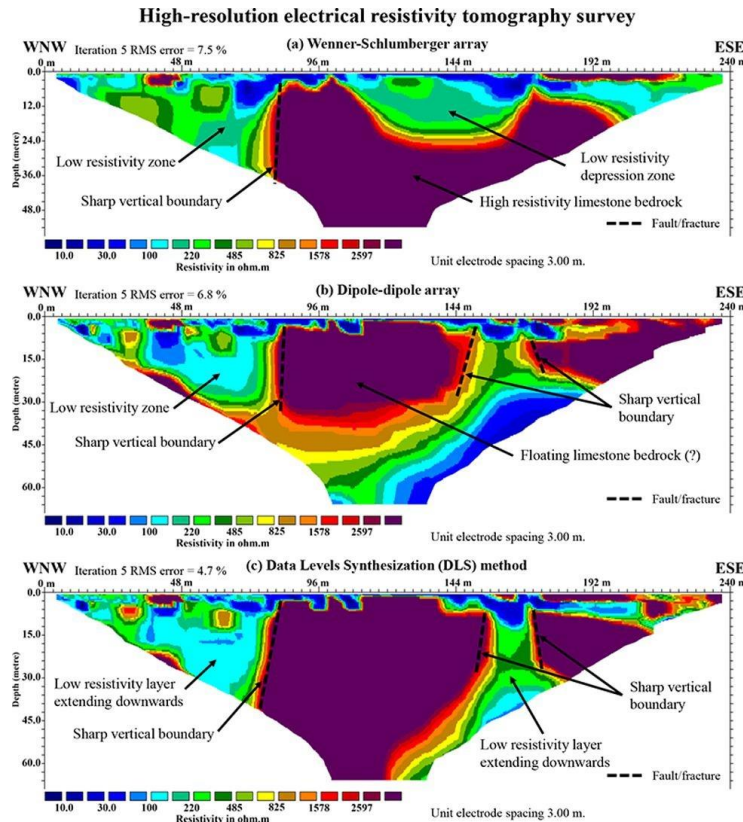


HIGH-ENERGY GEOPHYSICS RESEARCH GROUP

<https://wigner.hu/s/high-energy-geophysics/>

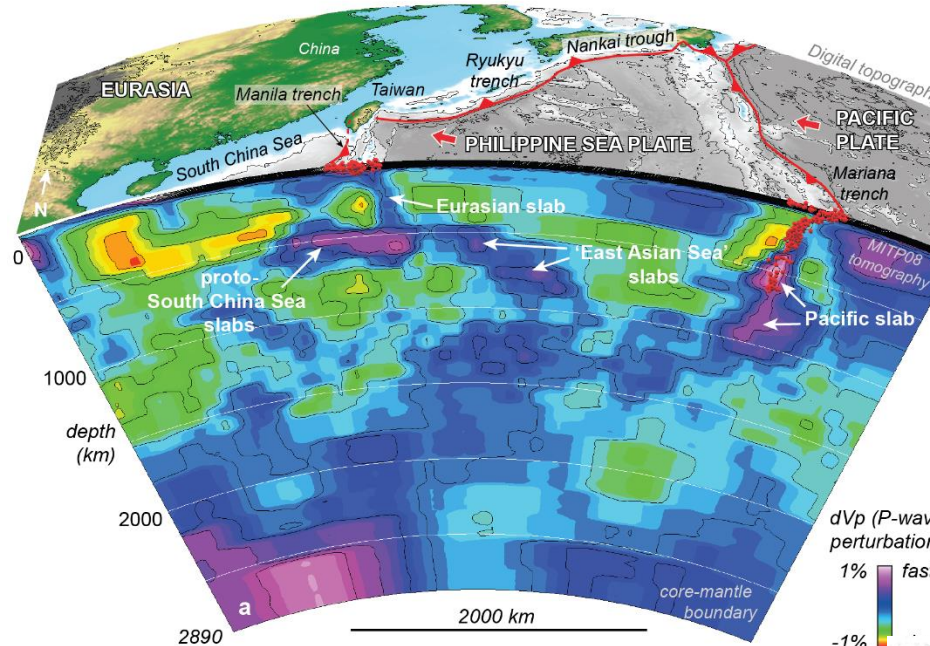
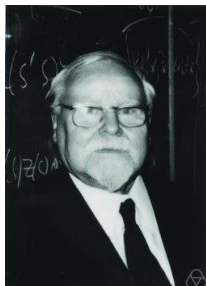
Tomográfia a geofizikában

Egyoldalas, alulhatározott tomográfiai problémák



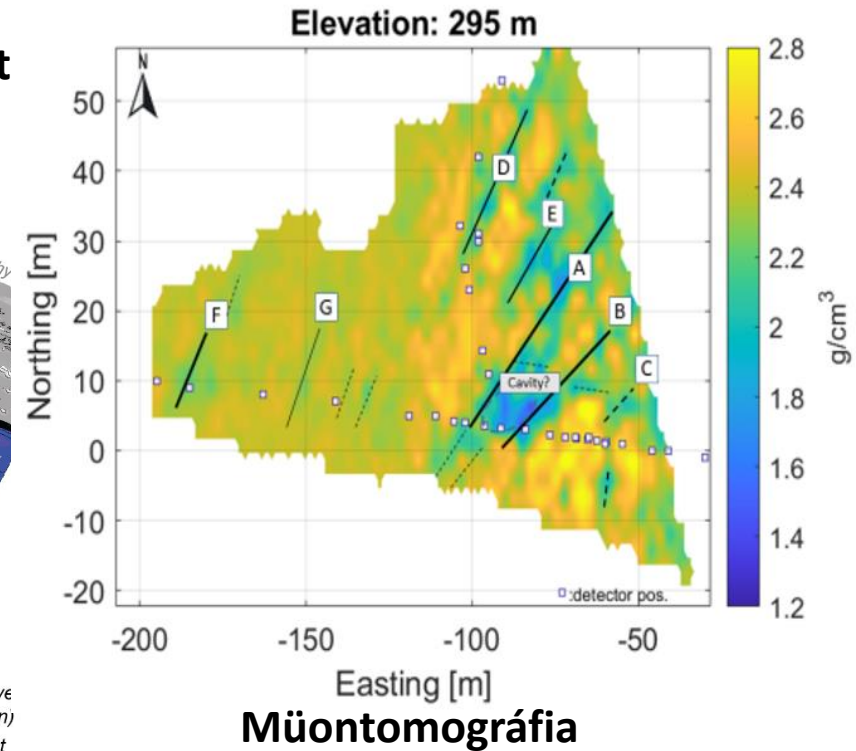
(Lee et al., 2021)
<https://doi.org/10.1016/j.jseas.2021.104880>

ERT



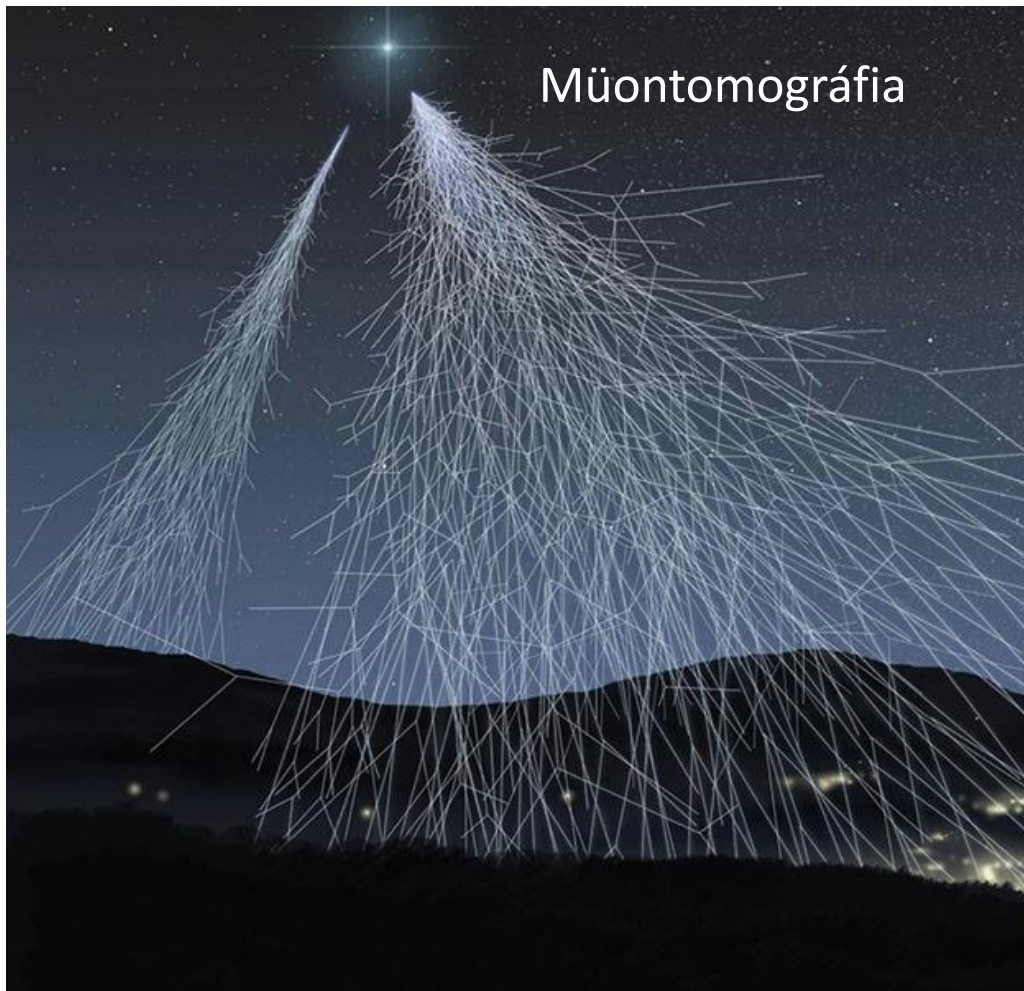
(Li et al., 2008)
<https://doi.org/10.1029/2007GC001806>

Szeizmikus tomográfia

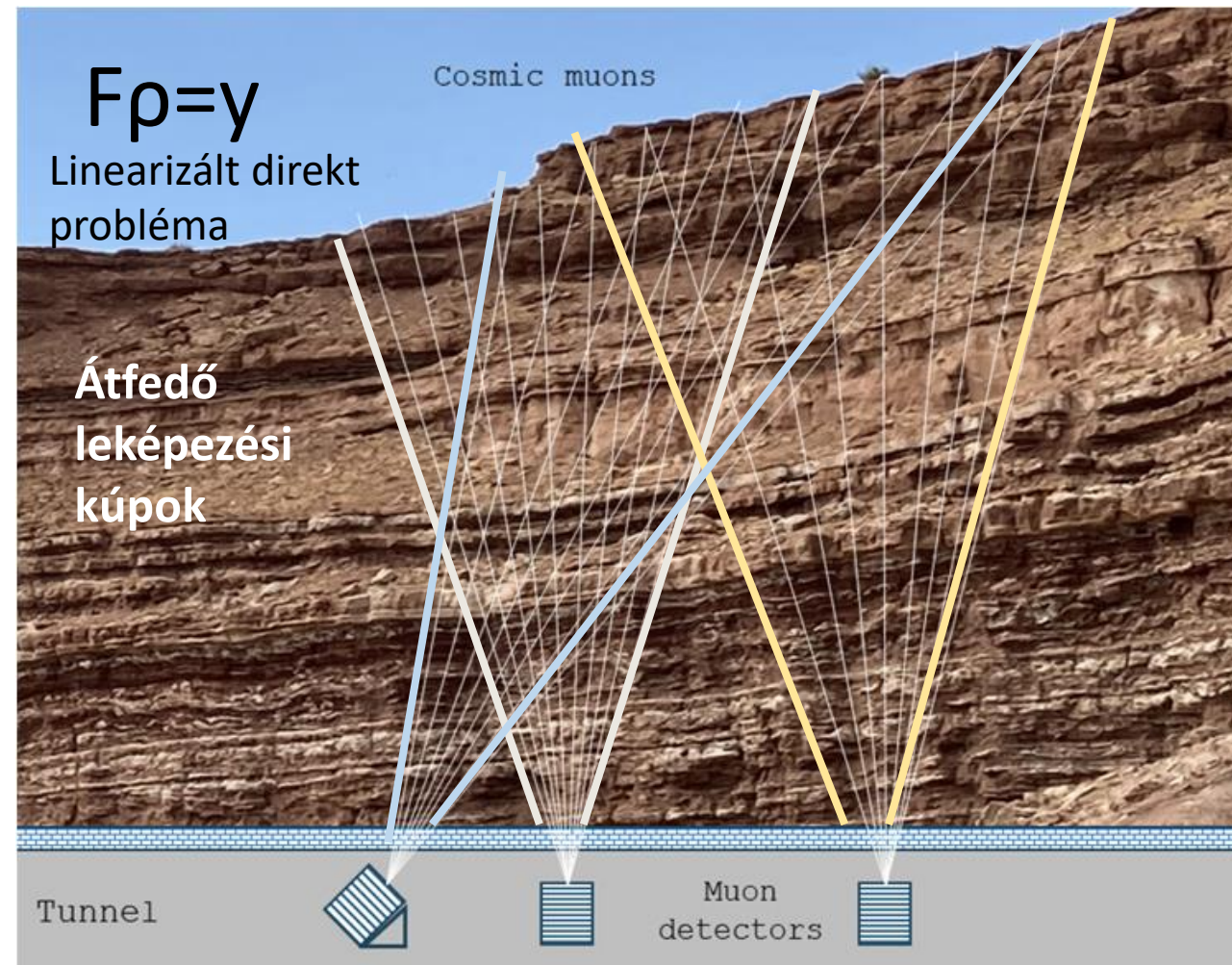


dVp (P-wave perturbation)
 1% fast
 -1%





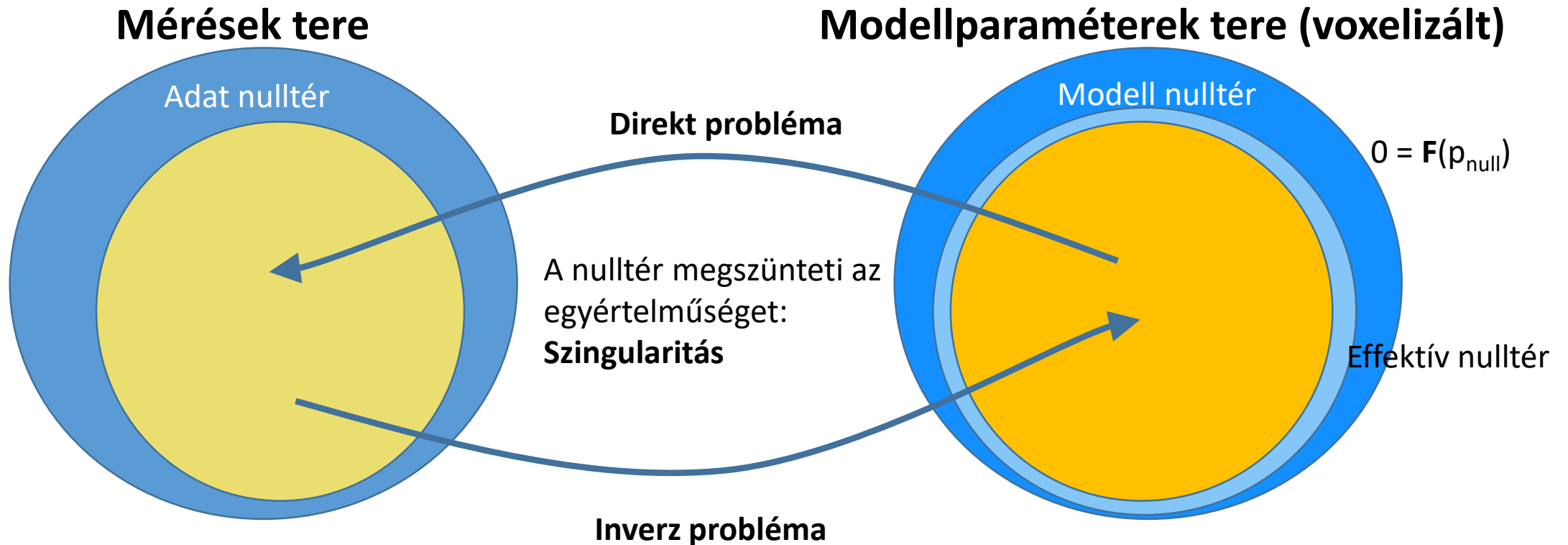
Forrás: Kevésbé fluktuáló müöntér, ismert szögeloszlással és energia spektrummal



Nagy áthatolóképesség – **Egyenes trajektória !!**
Sűrűségtől függő fluxus gyengülés – Térbeli Sűrűségeloszlás rekonstrukciója

Erősen alulhatározott inverz probléma...

REGULARIZÁCIÓ , SVD, EM, Leállított Landweber-iteráció stb.



A regularizált inverzió hatékonyságát, torzítását a **zaj** és **nulltér szerkezete és szimmetriái** határozzák meg.
A nulltér szimmetriái a leképezés jellegéből adódnak (Jacobi-mátrix szimmetriák)

Regularizált inverzió működik....

Becslés származtatása: L2-L2 Maximum Likelihood + Bayes típusú funkcionálból

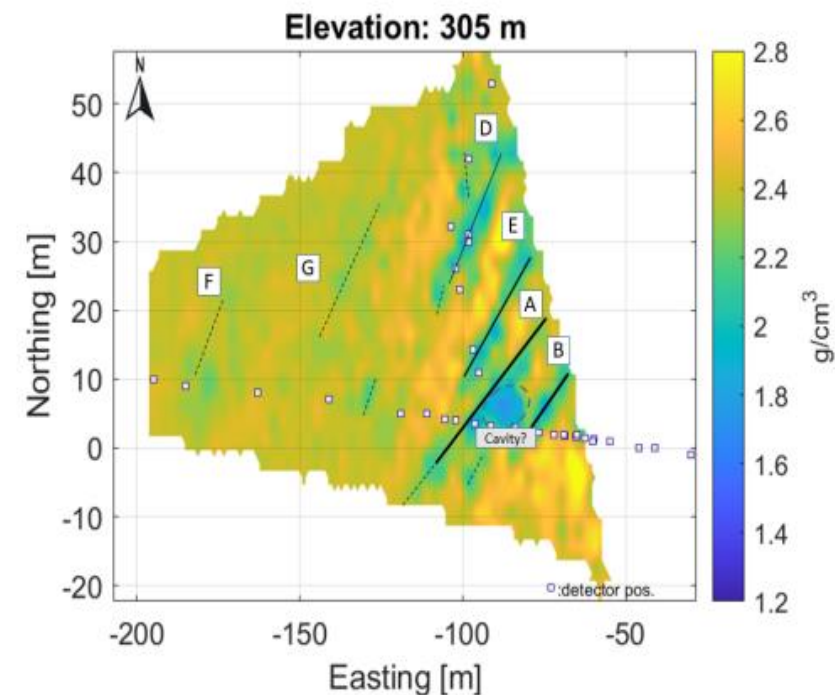
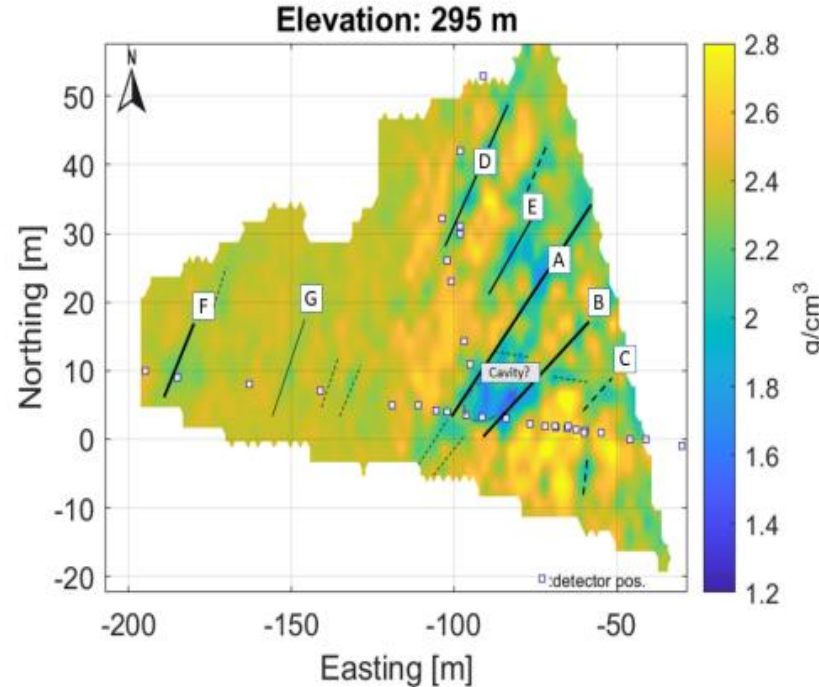
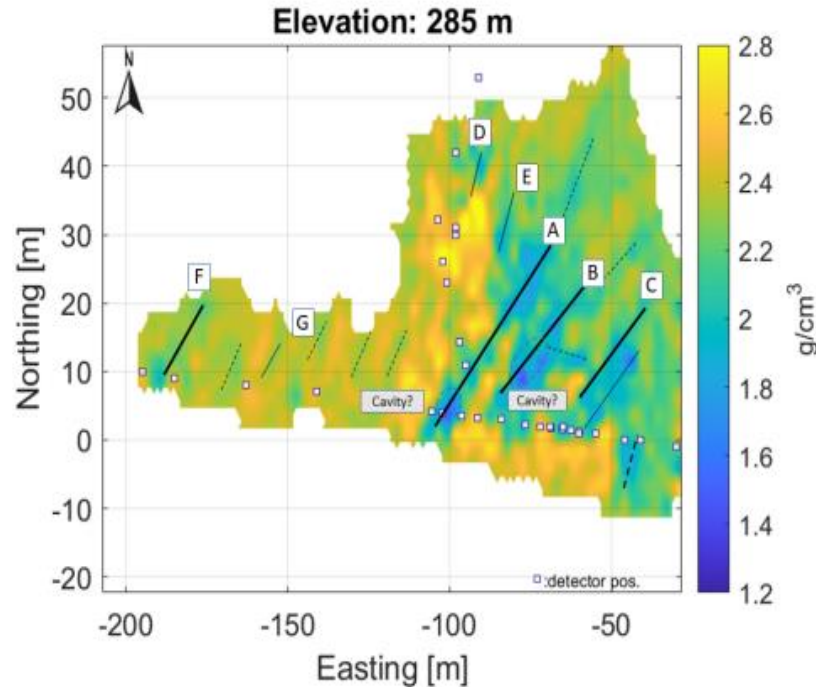
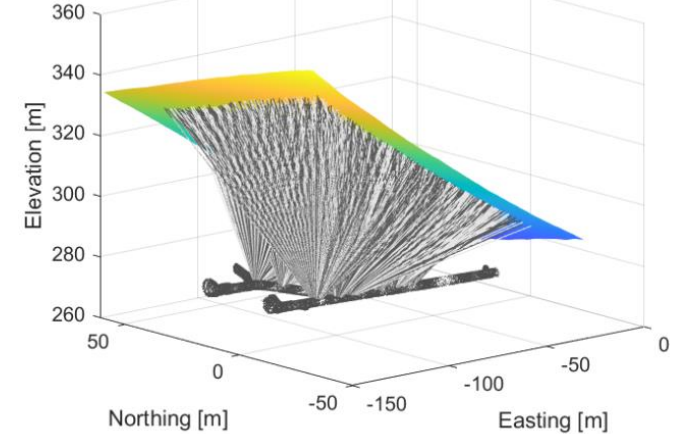
$$\hat{\rho} = (R + C_B^{-1})^{-1} (F^T C_y^{-1} \mathbf{y} + C_B^{-1} \rho_B)$$

Mérési információ súlya	Apriori információ súlya	mérés	Apriori eloszlás
-------------------------------	--------------------------------	-------	---------------------

$$R = F^T C_y^{-1} F$$

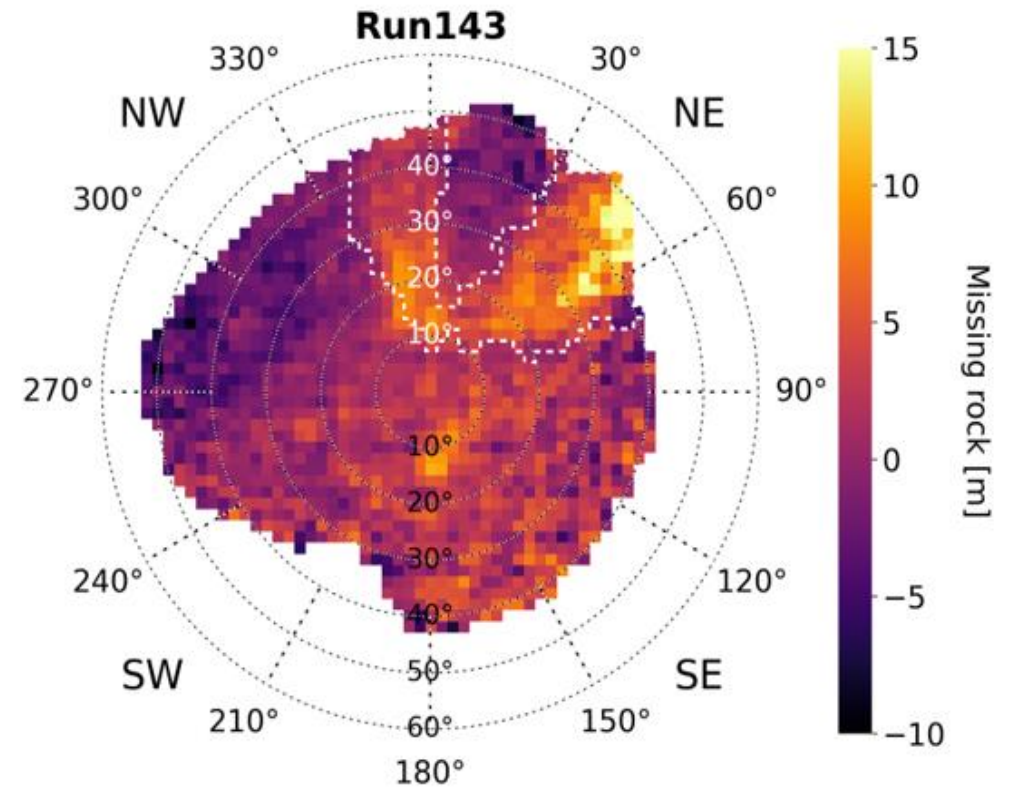
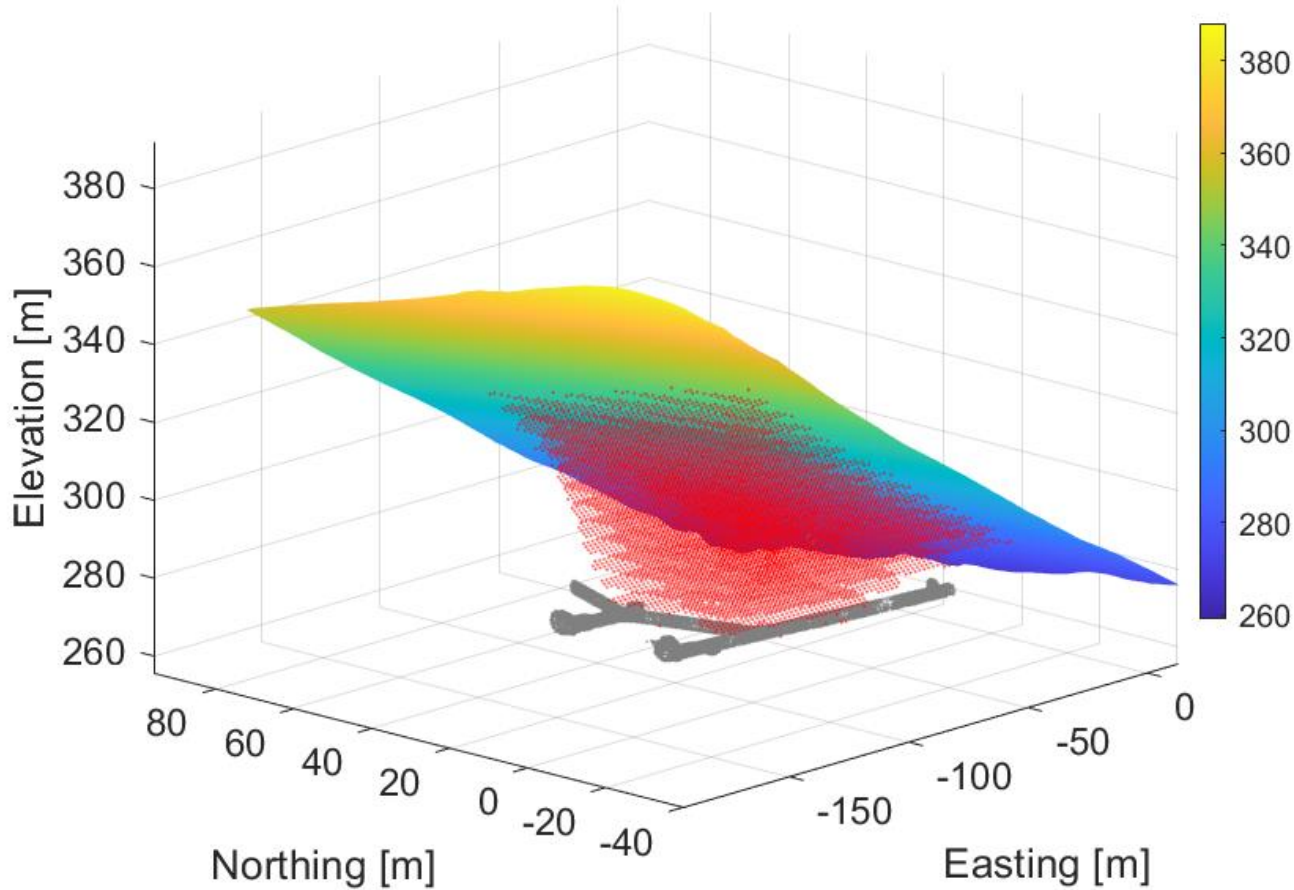
Fisher-mátrix

15 000 000 műon esemény, 46 mérési pont



Modell és mérés diszkretizálás:

Ekvidisztáns voxelhálózat



Mitől működik?

Milyen torzítással és milyen artefaktok megjelenésével?

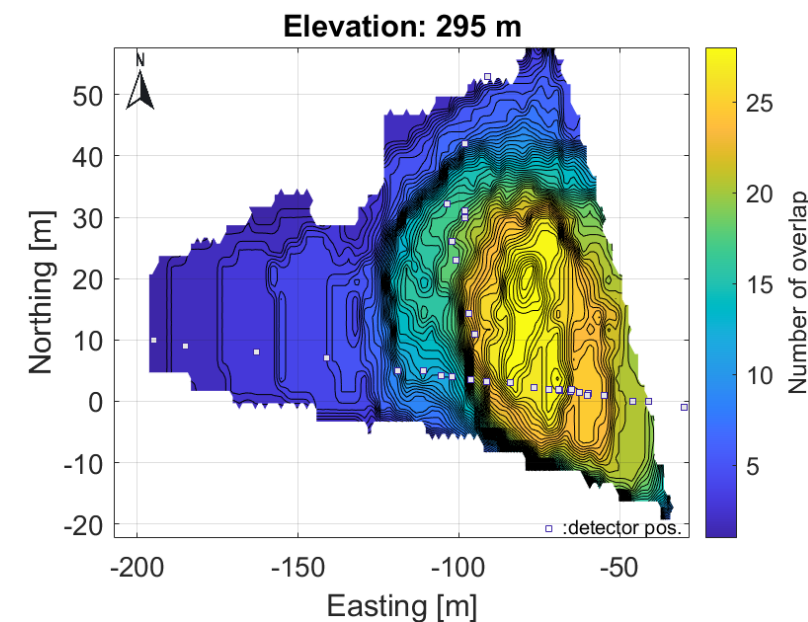
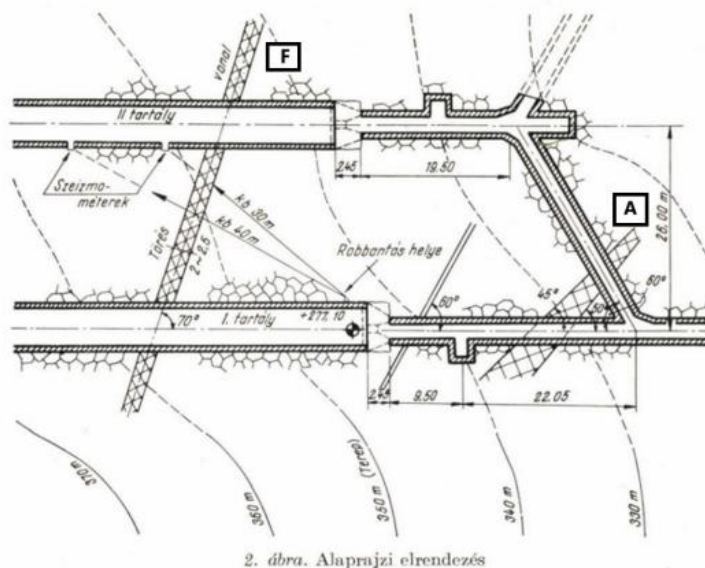
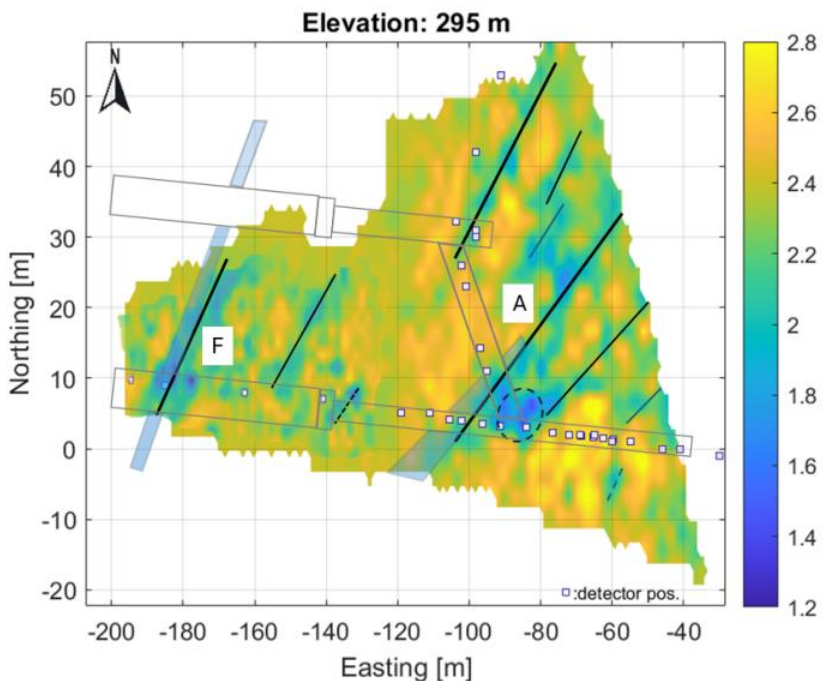
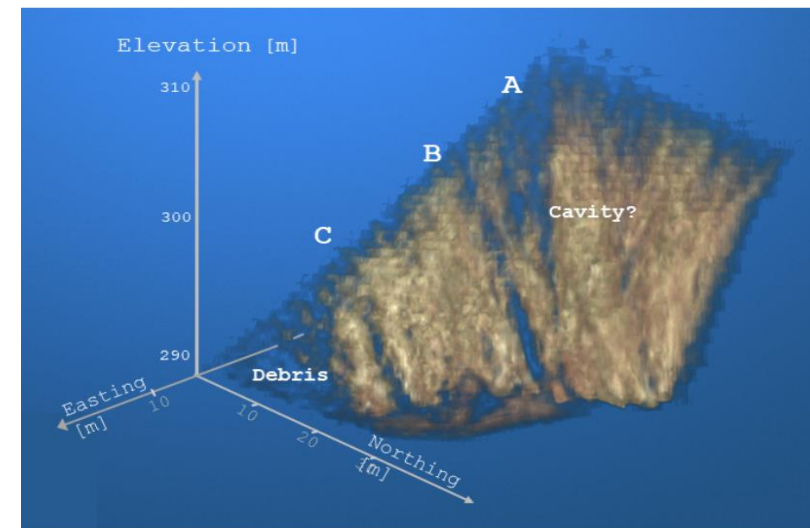
$$\delta \hat{\rho} = (R + C_B^{-1})^{-1} C_B^{-1} (\rho_B - \rho)$$

$$C_{\hat{\rho}} = (R + C_B^{-1})^{-1}$$



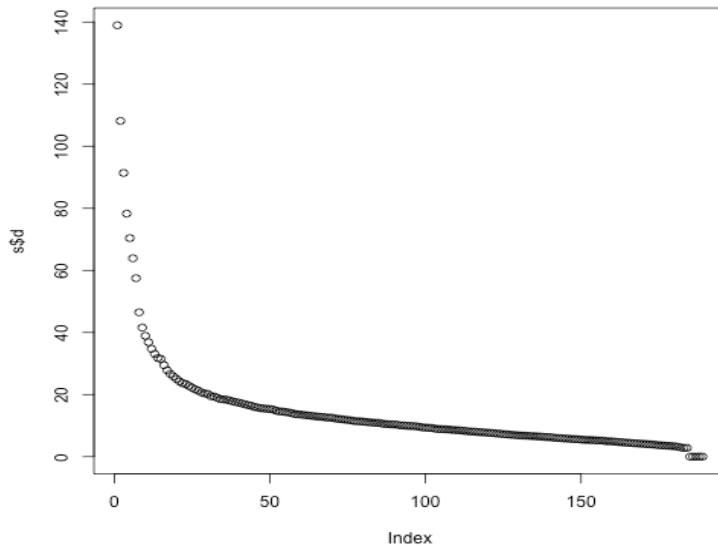
Torzítás

Paraméter kovariancia mátrix



Nulltér szerkezete, szimmetriái

Spektrál felbontás  Nulltér dimenzió és bázis



3D Müontomográfia:

Jellemzően: 20– 50000 mérés – 100- 150 000 voxel

Rang-deficiens Fisher-mátrix, nem invertálható regularizáció nélkül

SVD: magas multiplicitású zérus sajátérték („Vakfolt”)

Nulltér bázis

egy része véletlen jellegű vektor

másik rész leképezés szimmetriáit tükrözi

$$F\rho_1 = F\rho_2$$

Ekvivalenciák – szimmetria - nulltér

Szimmetria a szűk leképezési szögtartományból származik.

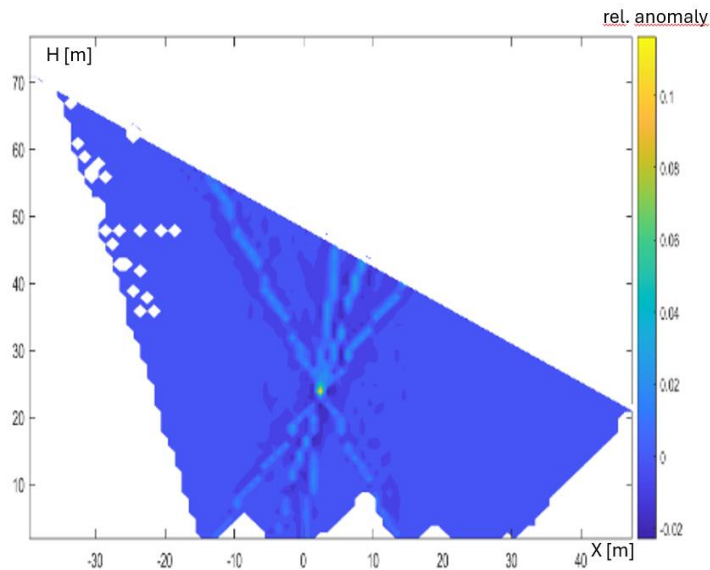
A Jacobi-mátrix szimmetriája, melyet a Fisher-mátrix is örököl

Unitér, permutációs szimmetria

Z-irányú felcserélhetőség müon-trajektória kötegek mentén

A regularizált megoldás torzulásai

Információ elmosódottsága megint csak a Fisher-mátrix segítségével vizsgálható. (parameter resolution matrix)



Mérések átfedés számának növelésével lokalizálódik a hatás

Elmosódottság leképezés irányú (korreláció irányok)

$$P = (R + C_B^{-1})^{-1} R$$

$$\hat{\rho} = P\rho$$

A **voxel felosztás finomítása**, növeli a korrelációt az ismeretlenek között és növeli a paraméterre vonatkozó szórást.

$$\delta\hat{\rho} = (R + C_B^{-1})^{-1} C_B^{-1} (\rho_B - \rho)$$

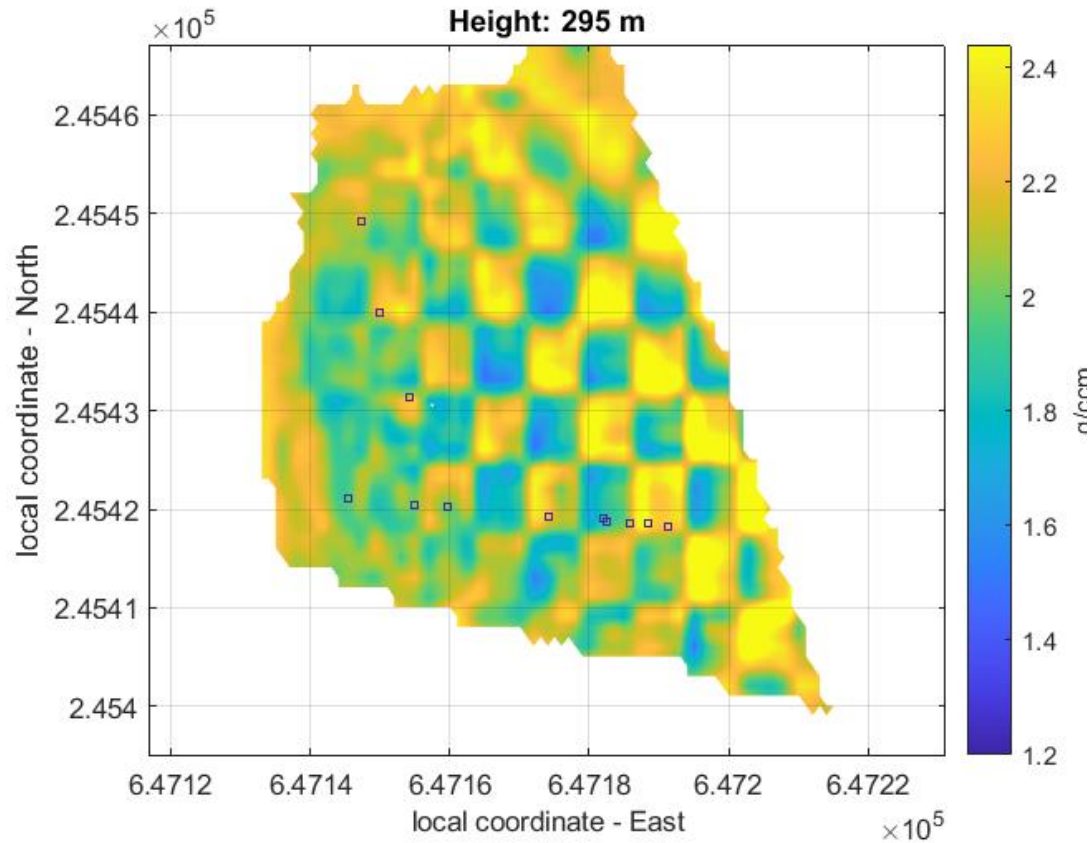
Torzulás forrása a prior sűrűség és a valóságos sűrűség eltérése

Vizsgálandó, hogy adott mérési elrendezésnél milyen objektumnak van jelentős **vetülete a nulltérre**. Ezek kimutatása bizonytalanabb

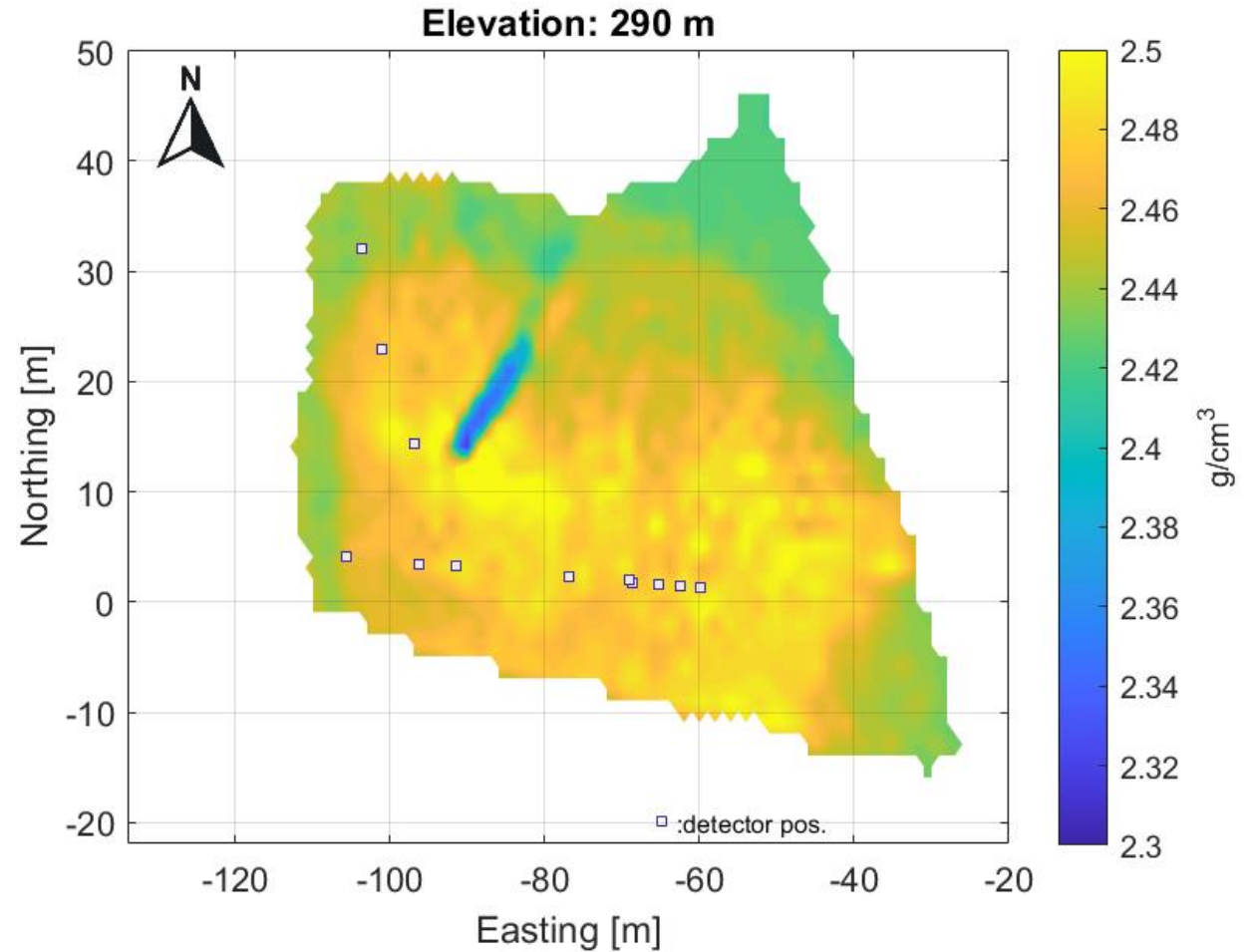


Inverziót megelőző szimulációs vizsgálatok:

Sakktábla tesztek:



Specifikus tesztek



Inverzió épített környezetben:

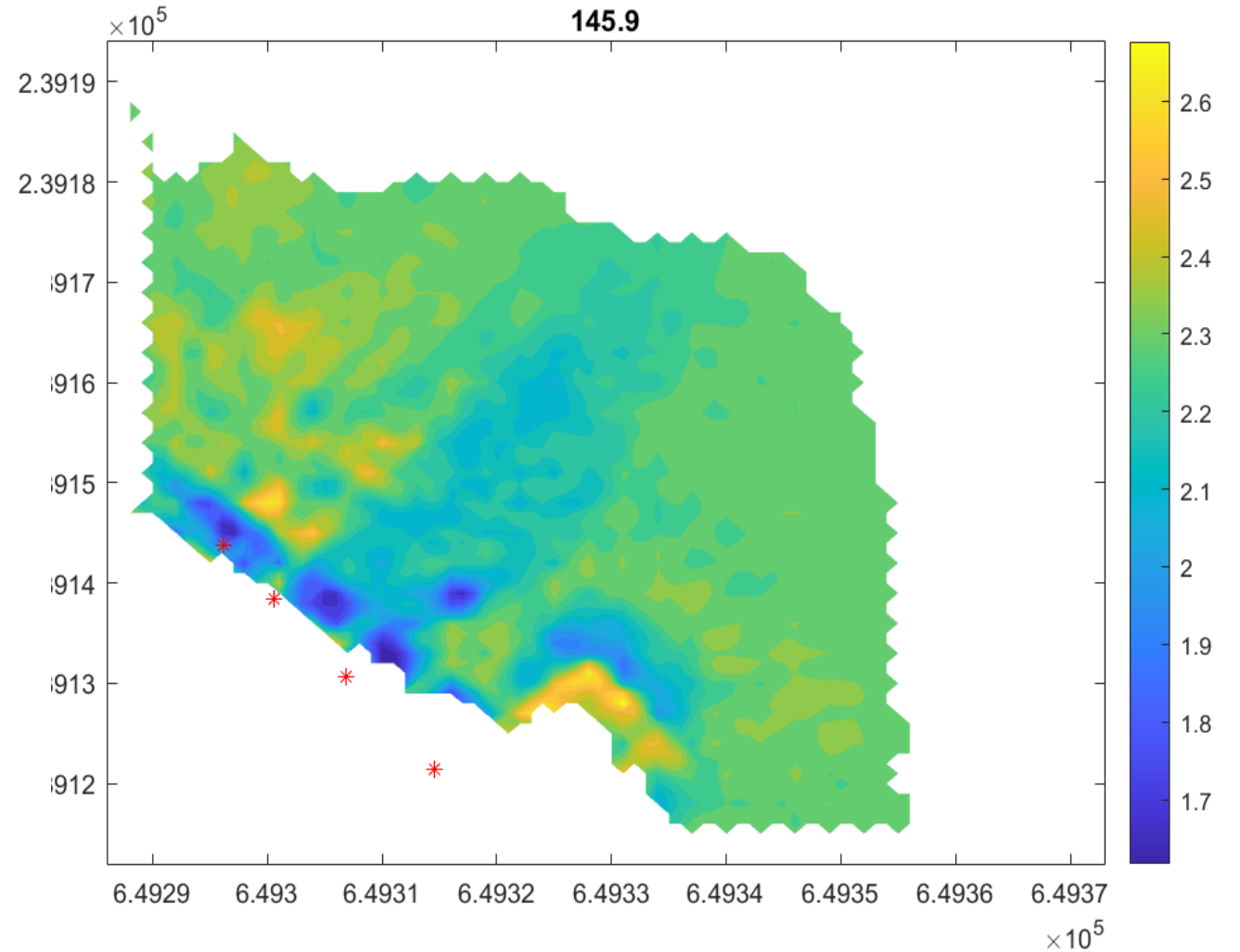
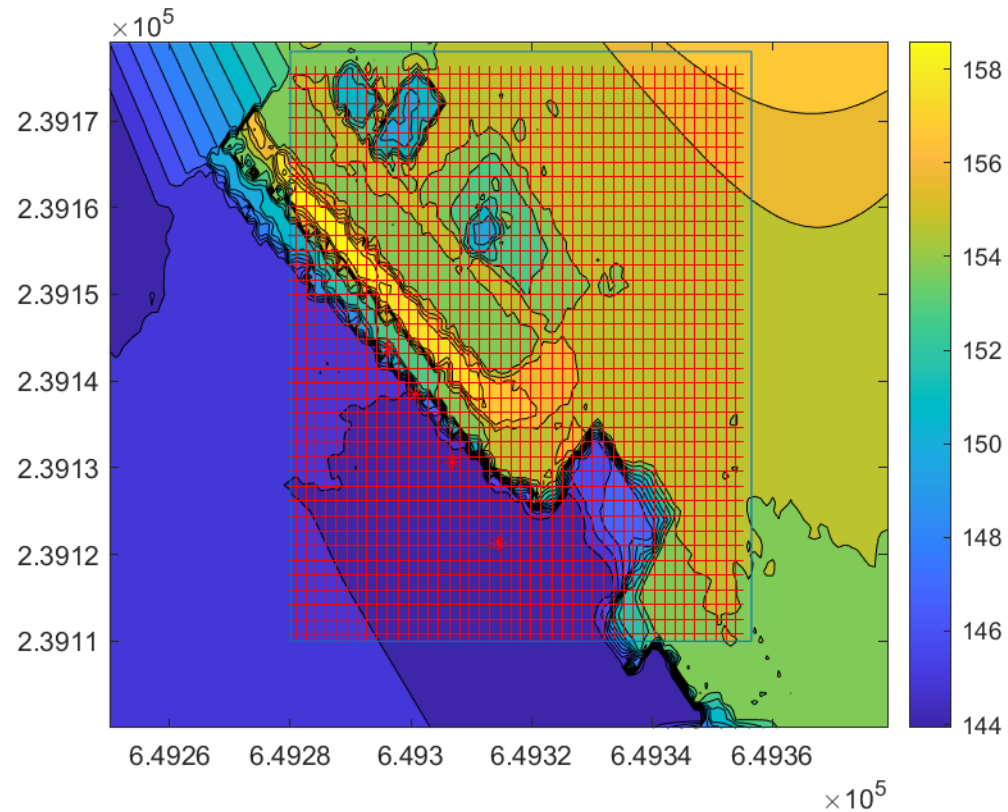
3D Rekonstrukció minősze 4 (!) detektorpozícióból

Átvilágított vastagság kb. 40 m

Térbeli felbontás: 0.8 – 1 m

Voxel szám: 45 x 40 x 40

Bayes inverzió



Köszönöm a megtisztelő figyelmet!

<https://wigner.hu/nagyenergias-fizikai-osztaly/nagyenergias-geofizika-kutatocsoport>

HUN
REN

Wigner

